Tantrix Discovery のすべてのチャレンジは解をもつ

小屋畑 拓

概要

3 以上のすべてのチャレンジ番号 n と、ルールで指定されるすべてのループ色について、Tantrix™ Discovery パズルが解をもつことを証明する。すなわち、タイル $1, \ldots, n$ (番号は 10 を法として巡回する) を六角格子上に配置して、指定色の線がすべてのタイルを通る 1 本の閉じたループをなし、接するすべての辺の色が一致し、どの空きマスも囲まれないようにできる。証明は、$n \leq 35$ について計算機で求めた具体的な解と、10 枚からなる周期的な部品 (ガジェット) による差し込み構成とを組み合わせる。この構成は、$n \equiv 4 \pmod{10}$ の赤のループだけを扱う C. Fraser の "4-tiles' equation" を一般化したものである。タイル 7 に対応する色については資料によって記述が異なるため、両方の解釈を扱う。すべての証拠データは、短い独立した検算プログラムで確認できる。

1 はじめに

Tantrix™ は、Mike McManaway が 1988 年にニュージーランドで考案したタイル配置ゲームである。タイルは六角形で、赤・黄・青・緑の 4 色のうち 3 色の線が 1 本ずつ描かれており、各線は 2 つの辺の中点を結ぶ。2 人用のゲームのほかに、1 人用のパズルがいくつか販売されている。その中で最も簡単な *Discovery* パズル [9] は、1 から 10 までの番号が付いた 10 枚のタイルを使う。タイルの色はすべて赤・黄・青であり、各タイルの裏の番号はこの 3 色のいずれかで印刷されている。パズル n $(3 \leq n \leq 10)$ では、タイル $1, \ldots, n$ を並べて、番号 n の色の線が n 枚すべてを通る 1 本の閉じたループとなり、かつ接するすべての辺の色が一致するようにする。

10 枚を超えると、複数の Discovery セットを使ってパズルが続けられる。**チャレンジ番号** n では、10 枚ごとに番号を 1 に戻しながらタイル $1, 2, \ldots, n$ を使い、ループ色は n の 1 の位で決まる [4]。Tantrix のプレイヤーは、解けた最大のチャレンジ番号の記録を競っている。解には穴があってはならず、公式記録として認められるにはさらに配置が「丸い」ことが求められる [4]。

すべてのチャレンジに解があるかは、自然な問いである。小さい n については計算機探索で答えが得られている。Kino と Uno [4, 5] はパズルを整数計画問題として定式化し、$n = 50$ までのチャレンジを解いた。無限に多くの n について知られている論法は、[4] で紹介されている C. Fraser の "4-tiles' equation" だけである。これは $n = 10x + 4$ のすべてについて赤のループを与え、丸さの規則が設けられた理由でもある。計算量の面では、Holzer と Holzer [3] および Baumeister と Rothe [1] が、タイルの位置が固定され回転だけを選ぶ関連パズル (回転パズル) が NP 完全であることを示している。

■本論文の貢献.

- 3 以上のすべてのチャレンジ n が、指定されたすべての色で解をもつことを証明する (定

理 8)。$n \equiv 7 \pmod{10}$ については赤と青の両方のループを扱うので、結果はタイル 7 の色の解釈によらない。

- 証明の土台は一般的な差し込み定理 (定理 7) である。一方向に周期的な 10 枚の**部品**を、適切な**土台**の解に何個でも差し込むことができる。穴がないという条件は、オイラー標数による議論 (補題 2, 3) で扱う。
- 必要な有限個の対象 (部品 3 個、土台 13 個、小さい n の解 42 個) は、CP-SAT ソルバー [7] で求めた。これらは短い独立した検算プログラムとともに公開する (第 7 節)。
- 副産物として、CP-SAT のモデルは $n = 70$ 程度までのチャレンジの解を数分以内に直接求める。

2 定義

■格子. 六角格子には axial 座標を用いる。マスは $\mathbb{Z}^2$ の点であり、6 つの方向は

$$D_0 = (1,0),\ D_1 = (0,1),\ D_2 = (-1,1),\ D_3 = (-1,0),\ D_4 = (0,-1),\ D_5 = (1,-1)$$

である。添字は $d \in \mathbb{Z}_6$ とし、$D_{d+3} = -D_d$ となる。ある d について $q - p = D_d$ のとき、2 つのマス p, q は**隣接する**という。マス p の辺 d とは、$p + D_d$ と共有する辺である。マスの集合 P に対し、閉六角形の和集合を $R(P)$ と書く。2 つの六角形が交わるのはマスが隣接するとき (辺を共有するとき) に限り、3 つの六角形が共通点をもつのはマスが互いに隣接するとき (頂点を共有するとき) に限る。また、4 つの六角形が共通点をもつことはない。

■タイル. Discovery セットは 10 枚のタイルからなる。タイル $t \in \{1, \ldots, 10\}$ は、辺の色 $T_t(0), \ldots, T_t(5) \in \{\mathrm{r}, \mathrm{y}, \mathrm{b}\}$ を時計回りに並べたもので表す (表 1)。各タイルでどの色もちょうど 2 つの辺に現れ、同じ色の 2 辺はその色の線で結ばれている。データは Scherphuis による Tantrix タイルの解説 [8] から取った。番号はそこでの “new” 番号で、これは Discovery セットの番号である。

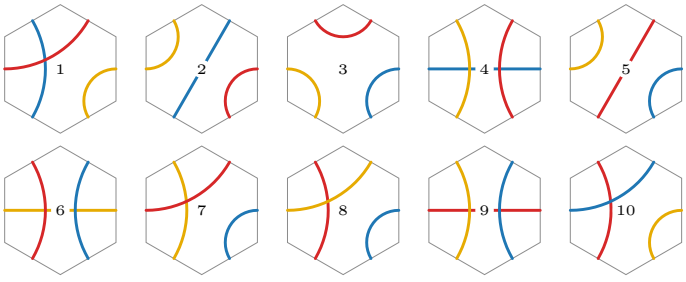


図 1 回転 0 の Discovery タイル 10 枚。辺 0 は右を向き、辺は時計回りに番号付けする。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
yybrbr	rrbyyb	bbyyrr	brybyr	bbryyr	ybryrb	bbyryr	bbryry	rbyryb	yyrbrb

表 1 Discovery タイルの辺の色 $T_t(0) \cdots T_t(5)$。

■配置. **配置**とは、有限集合 $P \subset \mathbb{Z}^2$ と、各 $p \in P$ に対するタイルの種類 $\tau(p) \in \{1, \ldots, 10\}$ および回転 $\rho(p) \in \mathbb{Z}_6$ の組である。使用マス p の辺 d の色は $\kappa(p, d) = T_{\tau(p)}(d - \rho(p))$ である。

■チャレンジ. $n \geq 3$ に対し、チャレンジ n ではタイル $1, 2, \ldots, n$ を使う。k 番目のタイルの種類は $((k-1) \bmod 10) + 1$ であり、したがって種類 t は $t \leq n$ なら $m_t(n) = \lfloor (n-t)/10 \rfloor + 1$ 回、そうでなければ 0 回使われる。n の**指定色**は $n \bmod 10$ によって次のように決まる。

$n \bmod 10$	0	1, 2, 3, 9	4, 5, 7	6, 8
色	r, y, b	y	r	b

$3 \leq n \leq 10$ については、これは公式のパズル説明 [9] の表である。そこでは $n \leq 9$ のそれぞれに 1 つのループ色が挙げられ、10 枚のパズルは 3 色すべてで解けると述べられている。$n \geq 11$ では色は n の 1 の位で決まり [4]、同じ表に従う。余り 7 については資料の記述が異なる。公式の説明では 7 枚のパズルは赤のループであるが、[8] ではタイル 7 の番号は青とされている。そこで、$n \equiv 7 \pmod{10}$ の青のループについても結果を証明する (定理 8)。

定義 1 (解)**.** $n \geq 3$ とし、c を n の指定色とする。配置 P が次を満たすとき、P を (n, c) の**解**という。

(S1) $|P| = n$ であり、すべての t について、ちょうど $m_t(n)$ 個のマスに種類 t のタイルがある。
(S2) (色の一致) $p, p + D_d \in P$ ならば $\kappa(p, d) = \kappa(p + D_d, d + 3)$。
(S3) (1 本のループ) $p \in P$ かつ $\kappa(p, d) = c$ ならば $p + D_d \in P$ であり、さらに $\kappa(p, d) = c$ となる組 $\{p, p + D_d\}$ を辺とする**ループグラフ** $L_c(P)$ が、P のすべてのマスを通る 1 つの閉路である。
(S4) (穴なし) $\mathbb{R}^2 \setminus R(P)$ の有界な連結成分はすべて空である。すなわち、どの空きマスも、隣接する空きマスをたどって十分大きな円の外側へ到達できる。

(S2) により (S3) の関係は対称であり、各マスには色 c の辺がちょうど 2 つあるので、(S3) の前半が成り立てば $L_c(P)$ はつねに閉路の非交和である。

3 基本的な性質

配置 P に対し、$V(P) = |P|$、$E(P)$ を P の隣接するマスの (順序のない) 組の数、$F(P)$ を P の互いに隣接する 3 マスの組の数とし、$\chi(P) = V(P) - E(P) + F(P)$ とおく。

補題 2 (オイラー標数)**.** $\chi(P)$ は $R(P)$ のオイラー標数に等しい。したがって、P のマスが隣接関係で連結ならば、P に穴がないことと $\chi(P) = 1$ は同値である。

証明. 閉六角形たちは、可縮な集合による $R(P)$ の有限被覆であり、空でない共通部分 (辺または頂点) も可縮である。よって脈体定理により、$R(P)$ はこの被覆の脈体とホモトピー同値である。第 2 節で述べた六角形の交わり方から、脈体は $V(P)$ 個の頂点、$E(P)$ 本の辺、$F(P)$ 個の三角形をもち、$\chi(R(P)) = \chi(P)$ となる。$R(P)$ が連結ならば、それはコンパクトで連結な平面多角形領域であり、補集合の有界な成分の数を h として $\chi(R(P)) = 1 - h$ が成り立つ。そのような成分は空きマス

の開六角形と辺の和集合なので、外へ到達できない空きマスを含む。逆に、囲まれた空きマスは有界な成分に含まれる。 □

補題 3 (切断の公式)**.** $a \in \mathbb{Z}$ とし、P を $P_{<a} = \{p \in P : p_x < a\}$ と $P_{\geq a} = \{p \in P : p_x \geq a\}$ に分ける。このとき

$$\chi(P) = \chi(P_{<a}) + \chi(P_{\geq a}) - \big(E_a(P) - F_a(P)\big)$$

が成り立つ。ここで $E_a(P)$, $F_a(P)$ は、$P_{<a}$ と $P_{\geq a}$ の両方にまたがる、P の隣接する組と互いに隣接する *3* マスの組の数である。これらの組は x 座標が $a-1$ または a のマスだけからなる。

証明. 各マス、各組、各 3 マス組は、$P_{<a}$ に完全に含まれるか、$P_{\geq a}$ に完全に含まれるか、両方にまたがるかのいずれかである。隣接するマスの x 座標の差は高々 1 なので、またがる組や 3 マス組は列 $a-1$ と a だけを使う。 □

パズルの定式化によっては、(S4) の代わりに**局所的な**隙間なしの規則を使うことがある。すなわち、各タイルのまわりで使用中の隣接マスを巡回的に読むと、1 つの連続した並びになるという規則である。次の補題は (S4) の方が強い条件であることを示しており、我々の解は両方を満たす。(逆は成り立たない。あるマスからの距離が 1 または 2 の 18 マスは局所的な規則を満たすが、そのマスを囲む。)

補題 4 (穴なしならば局所的に隙間なし)**.** P がある色 c について *(S3)* と *(S4)* を満たすとし、$p \in P$ とする。このとき、p の使用中の隣接マス $p + D_d$ は、連続した方向 d の *1* つの巡回的な並びをなす。

証明. $q_d = p + D_d$ と書く。6 つの隣接マスがすべて使用中なら示すことはないので、使用中の隣接マスの極大な巡回的並びの数を $k \geq 1$、使用中の隣接マスの数を a とする。$D_{d+1} - D_d$ も方向なので q_d と q_{d+1} は隣接し、q_d と q_{d+2} は隣接しない。したがって p を含む互いに隣接する 3 マス組は、両方の隣接マスが使用中である $\{p, q_d, q_{d+1}\}$ にちょうど一致し、その数は $a-k$ である (長さ ℓ の並びには連続する組が $\ell - 1$ 個ある)。p を取り除くと頂点 1 個、組 a 個、3 マス組 $a-k$ 個が消えるので

$$\chi(P \setminus \{p\}) = \chi(P) - 1 + a - (a-k) = \chi(P) - 1 + k = k$$

となる。ここで $\chi(P) = 1$ を用いた (補題 2。(S3) より P は連結である)。(S3) より $L_c(P)$ はすべてのマスを通る閉路なので、p を取り除くと $P \setminus \{p\}$ のすべてのマスを通る道が残り、$P \setminus \{p\}$ は連結である。補題 2 の証明と同様に、連結な配置は穴の数を h として $\chi = 1 - h \leq 1$ を満たす。よって $k \leq 1$ である。 □

4 部品と土台

整数 $W \geq 3$, $H \geq 1$ を固定し、$V = (W, 0)$ とおき、$S = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : 0 \leq y < H\}$ を高さ H の横向きの帯とする。マスが $[0, W) \times [0, H)$ に含まれる配置 G に対し、その周期的な拡張を $\widehat{G} = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} (G + jV)$ とする。ただし $p + jV$ のタイルは p のタイルと同じとする。色の一致やループグラフなどの概念は、無限の配置 $\widehat{G}$ にもそのまま拡張される。

定義 5 (部品)**.** 色 c の**部品**とは、次を満たす配置 $G \subset [0, W) \times [0, H)$ である。

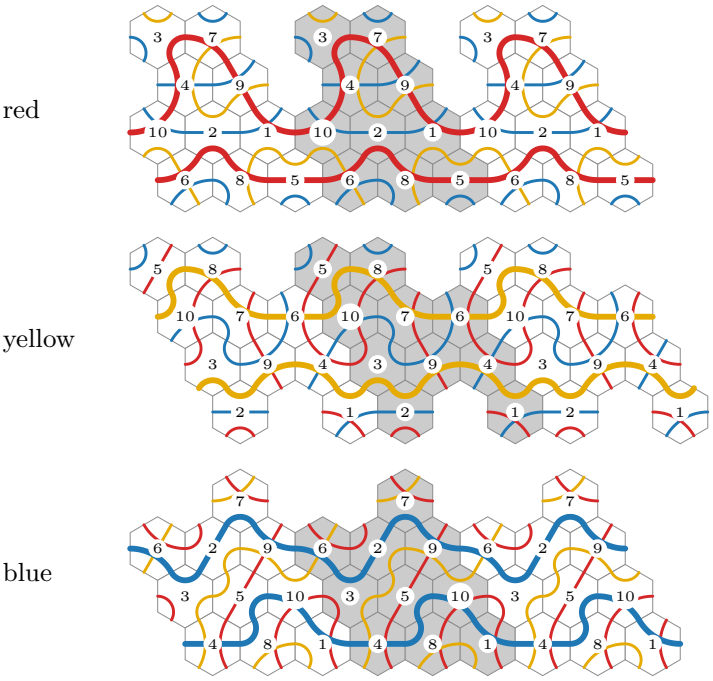


図 2　部品 G_{r}, G_{y}, G_{b} ($W=3$, $H=4$)。$\widehat{G}$ の 3 周期分を示し、1 周期を網掛けした。太線はループ色の 2 本の線 Λ_1, Λ_2 である。

(G0) $|G|=10$ であり、タイルの種類 $1,\dots,10$ がそれぞれちょうど 1 回現れる。

(G1) $\widehat{G}$ は色の一致条件 (S2) を満たす。

(G2) $p\in\widehat{G}$ かつ $\kappa(p,d)=c$ ならば $p+D_d\in\widehat{G}$ である。ループグラフ $L_c(\widehat{G})$ はちょうど 2 つの連結成分 Λ_1, Λ_2 をもつ。さらに、その辺のうち列 $W-1$ のマスと列 W のマスを結ぶものはちょうど 2 本で、Λ_1 と Λ_2 に 1 本ずつ属する。

(G3) $\chi_{\mathrm{per}}(G):=\chi(G)-\bigl(E_W(\widehat{G})-F_W(\widehat{G})\bigr)=0$。

周期性により、(G2) から、すべての $j\in\mathbb{Z}$ について列 $jW-1$ と jW の間に Λ_1 の辺と Λ_2 の辺がちょうど 1 本ずつあり、すべての j について $E_{jW}(\widehat{G})=E_W(\widehat{G})$, $F_{jW}(\widehat{G})=F_W(\widehat{G})$ が成り立つ。言い換えると、G は円筒 $(\mathbb{Z}/W\mathbb{Z})\times[0,H)$ 上の配置を表し、その上で色 c の線は継ぎ目を 1 回ずつ越える 2 つの閉路をなす。$\chi_{\mathrm{per}}(G)$ はこの円筒上の配置のオイラー標数である。Λ_1 と Λ_2 はどの列の切れ目もちょうど 1 回ずつ越えるので、Λ_1 (および Λ_2) の連続する 2 回の越え方の間の部分は 1 周期 $[jW,(j+1)W)\times[0,H)$ の中にあり、$\widehat{G}$ のどのマスも Λ_1 か Λ_2 の上にある。

定義 6 (土台)**.** G を色 c の部品とする。G の**土台**とは、(n_0,c) の解 B であって、$B\subset S$ かつ $B\cap\bigl([0,2W)\times\mathbb{Z}\bigr)=G\cup(G+V)$ (タイルは $\widehat{G}$ のもの) を満たすものである。

$k\ge 0$ に対し、配置

$$B_k=\{\,p:p\in B,\ p_x<W\,\}\ \cup\ \bigcup_{j=1}^{k}(G+jV)\ \cup\ \{\,p+kV:p\in B,\ p_x\ge W\,\}$$

を定める。ただし各マスはタイルを保つ。言葉で言えば、G と $G+V$ の間に部品を k 個差し込み、その右側をすべて kV だけずらす。

$B_0=B$ であり、$B_k\cap\bigl([0,(k+2)W)\times\mathbb{Z}\bigr)=\widehat{G}\cap\bigl([0,(k+2)W)\times\mathbb{Z}\bigr)$ であることに注意する。

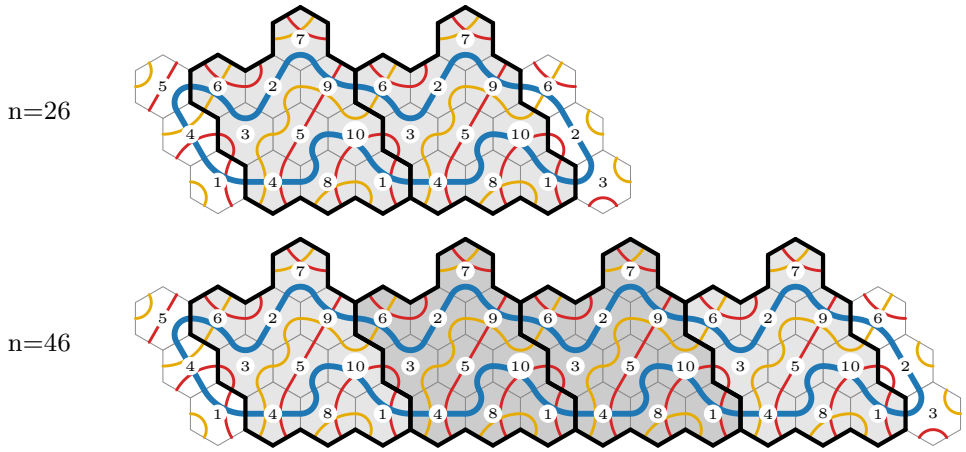


図 3　上: 土台 $B_{6,\mathrm{b}}$ ($n_0 = 26$)。G と $G + V$ を網掛けし、それぞれ太線で囲んだ。下: 部品を 2 個差し込んで得られる $n = 46$ の解 B_2 (濃い網掛けが差し込んだ部品)。10 枚ずつの部品のコピーをそれぞれ太線で囲んだ。

5　差し込み定理

定理 7 (差し込み)**.** B が色 c の部品 G の土台であり、(n_0, c) の解であるならば、すべての $k \geq 0$ について B_k は $(n_0 + 10k, c)$ の解である。

証明. 次の 3 つの列の範囲を考える。

$$U_1 = \{x < W\}, \qquad U_2 = \{0 \leq x < (k+2)W\}, \qquad U_3 = \{x \geq (k+1)W\}.$$

構成より、B_k は U_1 では B と、U_2 では $\widehat{G}$ と、U_3 では $B \cap \{x \geq W\}$ の平行移動 $B + kV$ と一致する。帯 S の外では 3 つとも空である。

局所性. 隣接する 2 マス、および互いに隣接する 3 マスは、共通の U_i に含まれる。実際、それらの x 座標の差は高々 1 である。すべてが $< W$ でもなく、すべてが $\geq (k+1)W$ でもなければ、すべて $[W-1, (k+1)W]$ に含まれ、$W \geq 1$ よりこれは U_2 に含まれる。したがって、B_k の隣接する組 (とその上のタイル) は、B、$\widehat{G}$、$B + kV$ のいずれかの隣接する組である。

(S1). $|B_k| = n_0 + 10k$ であり、(G0) より差し込んだ各部品はすべての種類のタイルを 1 枚ずつ加える。$n_0 \geq 10$ なのですべての t について $m_t(n_0 + 10k) = m_t(n_0) + k$ が成り立ち、(S1) が成り立つ。

(S2) **と** *(S3)* **の前半**. これらは隣接する組についての条件なので、局所性により、B についての (S2), (S3) と $\widehat{G}$ についての (G1), (G2) から従う。特に $L_c(B_k)$ は閉路の非交和である。

1 **本のループ**. 列 $W-1$ と W の間のループグラフの辺は $[0, 2W) \times \mathbb{Z}$ のマスを結び、そこでは B は $\widehat{G}$ と一致する。(G2) より、$L_c(B)$ にはそのような辺がちょうど 2 本あり、それを $e_1 \in \Lambda_1$, $e_2 \in \Lambda_2$ とする。閉路 $L_c(B)$ からこれらを取り除くと 2 本の道が残る。列 $W-1$ と W の間を越える辺はほかにないので、一方の道 Q_L は $x < W$ の B のマスからなり、もう一方の道 Q_R は $x \geq W$ のマスからなる。B_k では Q_L はそのまま (領域 U_1) で、Q_R は kV だけ平行移動される (領域 U_3)。領域 U_2 では、$L_c(\widehat{G})$ の成分 Λ_1, Λ_2 が e_1 から $e_1 + kV$ までの区間と $e_2 + kV$ から e_2 までの区間を含み、これらは $[0, (k+2)W)$ にあって、差し込んだ部品のすべてのマスを通る。したがって

$L_c(B_k)$ は

$$Q_L \ \to\ e_1 \ \to\ (\Lambda_1 \text{ の区間}) \ \to\ e_1 + kV \ \to\ Q_R + kV$$
$$\to\ e_2 + kV \ \to\ (\Lambda_2 \text{ の区間}) \ \to\ e_2 \ \to\ Q_L$$

という $n_0 + 10k$ 個すべてのマスを通る 1 つの閉路であり、(S3) が示された。

(S4). (S3) より B_k は連結なので、補題 2 により $\chi(B_k) = 1$ を示せばよい。$\kappa = E_W(\widehat{G}) - F_W(\widehat{G})$ とおく。切れ目をまたぐ組と 3 マス組は、切れ目の両隣の 2 列だけを使い (補題 3)、$x = W$ と $x = (k+1)W$ の切れ目の近くでは B_k は $\widehat{G}$ と一致する。同様に、$x = W$ の切れ目の近くでは B は $\widehat{G}$ と一致する。補題 3 を B に $x = W$ で適用すると

$$\chi(B_{<W}) + \chi(B_{\geq W}) = \chi(B) + \kappa$$

を得る。これを B_k に $x = W$ と $x = (k+1)W$ で、中央部分 $\widehat{G} \cap [W, (k+1)W)$ に $k-1$ 個の内部の切れ目 $x = jW$ $(2 \leq j \leq k)$ で適用すると

$$\chi(B_k) = \chi(B_{<W}) + \big(k\,\chi(G) - (k-1)\kappa\big) + \chi(B_{\geq W}) - 2\kappa = \chi(B) + k\big(\chi(G) - \kappa\big) = \chi(B) + k\,\chi_{\mathrm{per}}(G)$$

を得る。($k = 0$ のときは中央の項がなく、式は $\chi(B_0) = \chi(B)$ となる。) (G3) と $\chi(B) = 1$ より $\chi(B_k) = 1$ である。 □

6 主定理の証明

定理 8. すべての $n \geq 3$ と n のすべての指定色 c について、チャレンジ (n, c) は解をもつ。さらに、$n \equiv 7 \pmod{10}$ を満たすすべての $n \geq 3$ について、(n, b) も解をもつ。

証明. c が余り r の指定色であるか、$(r, c) = (7, \mathrm{b})$ であるとき、(r, c) を**必要な組**と呼ぶ。必要な組は 13 個ある。各色 $c \in \{\mathrm{r}, \mathrm{y}, \mathrm{b}\}$ について $W = 3$, $H = 4$ の部品 G_c が存在し (図 2)、必要な各組 (r, c) について $n_0(r, c) \equiv r \pmod{10}$ を満たす G_c の土台 $B_{r,c}$ が存在する (表 2 と付録 付録 A)。どちらも第 7 節で述べる検算プログラムで確認した。定理 7 により、$n \geq n_0(n \bmod 10, c)$ かつ $n \equiv n_0 \pmod{10}$ を満たすすべての n について (n, c) は解をもつ。必要な組では $n_0(7, \mathrm{b}) = 37$ を除いて $n_0(r, c) \leq 35$ なので、これで $n \geq 36$ はすべて扱える。$3 \leq n \leq 35$ については、必要なすべての組の具体的な解が証拠データに含まれている。 □

(r, c)	0r	0y	0b	1y	2y	3y	4r	5r	6b	7r	7b	8b	9y
n_0	30	30	30	31	32	33	34	35	26	27	37	28	29

表 2　第 7 節の探索で得た土台の大きさ。

7 計算

証明に使う有限個の対象はすべて、Google OR-Tools の制約ソルバー CP-SAT [7] (バージョン 9.8、C#) で求め、別のプログラムで検算した。探索プログラムは証明の一部ではなく、証明の一部となるのは検算プログラムだけである。

■盤面を固定したモデル. 候補マスの集合 C (原点を中心とする半径 R の六角形領域、または帯 S の一部) に対し、モデルは各マス $p \in C$ について真偽変数 u_p (「p を使う」)、隣接するマスの順序対ごとに真偽値の弧変数、および $\neg u_p$ に等しい自己ループのリテラルをもつ。大域制約 `AddCircuit` により、使用マスは 1 つの有向閉路をなし、これがループとなる。さらに真偽変数で、各使用マスにおけるループの入る辺と出る辺、タイルの種類と回転を選ぶ。(種類, 回転, 入る辺, 出る辺) を関係づける表制約により、タイル上の色 c の線が入る辺と出る辺を結ぶようにする。残りの制約は、$\sum_p u_p = n$、タイルの枚数 $m_t(n)$、隣接する使用マスのすべての組での色の一致 (S2)、そして穴なしの条件を $\chi(P) = 1$ (補題 2) の形で表したものである。後者は、隣接する組と互いに隣接する 3 マス組のそれぞれに積のリテラルを 1 つずつ置いて線形に書く。ソルバーを助ける冗長な制約が 2 つある。全回転の 1/6 を単位とすると、ループの曲がりの合計は進む向きに応じて $+6$ または -6 である。小さいインスタンスではこれを $+6$ に固定するが、これは向きを選ぶだけである。また、色 c の線の形はタイルの種類だけで決まるので、急カーブ・ゆるいカーブ・直線の数は n から決まる。対称性の除去として、原点を使用マスとする。補題 4 の局所的な規則も冗長な制約として加えている。

■小さい n の証拠. $3 \le n \le 35$ と必要なすべての色について、半径 $R_{\min}, \ldots, R_{\min} + 3$ の六角形領域でモデルを解いた。ここで $R_{\min}$ は、領域のマス数が n 以上となる最小の半径である。各インスタンスは、12 個のワーカースレッドで長くても数秒で解けた。同じモデルで、より大きなチャレンジも直接解ける。赤のループが $n = 50, 60, 70$ でそれぞれ 36, 18, 272 秒で見つかった。$n = 80$ では、半径 5 と 6 のどちらでも 300 秒以内に解は見つからなかった。比較として、[4] は整数計画ソルバーで $n = 50$ に 5549 秒かかったと報告している (ただしハードウェアはかなり古い)。初期の版のモデルは、Gecode に基づく `gfd` ライブラリを用いた ECLiPSe [2] と MiniZinc [6] で書かれ、モデルの独立な照合に用いた。ECLiPSe 版は $n \le 40$ のすべてのチャレンジを解いた。

■部品. 部品は円筒 $(\mathbb{Z}/W\mathbb{Z}) \times [0, H)$ 上で直接探索する。各使用マスには $\{1, 2\}$ の線の番号と順番の変数を与える。継ぎ目 $x = W - 1 \to x = 0$ を越えないループの弧では、順番が 1 ずつ増える。これにより、円筒を一周しない閉路が禁止される。各線は継ぎ目を越える弧をちょうど 1 本もち、その向きは線 1 では正、線 2 では負であり、各線の曲がりの合計は 0 である。どのタイルの種類も 1 回ずつ現れ、2 本の線は接し、円筒上のオイラー標数は 0 (これが (G3)) である。$W = 3$, $H = 4$ では、探索は各色の部品を 1 秒未満で見つけた。

■土台. 部品を列 $[0, 2W)$ に (G と $G + V$ として) 固定し、$-K \le x < 2W + K$ を満たす S のマスで盤面固定のモデルを解いた。土台の大きさは $j = 0, 1, 2, 3$ の順に $n_0 = 20 + r + 10j$ とし、$K = n_0 - 19$ とした。各値について曲がりの合計 $+6$ と -6 の両方を試した。表 2 の 13 個の土台は、それぞれ長くても 16 秒で見つかった。試したより小さい n_0 の値では土台は得られなかった。

■独立した検算プログラム. 証拠データには各解がループ順に記録されており、タイルごとに (位置, 種類, 回転, 入る辺, 出る辺) の組が 1 つある。探索のコードとは独立に書いた約 260 行の JavaScript (Node.js、外部依存なし) の検算プログラムが、次を確認する。

1. 42 個の小さい n の証拠それぞれについて条件 (S1)–(S4)。(S4) は空きマスの塗りつぶしと、それとは別に $\chi = 1$ とで確かめる。
2. 3 個の部品について、円筒上で直接、条件 (G0)–(G3)。

3. 13 個の土台について定義 6 の前提。さらに定理 7 の確認として、$0 \le k \le 30$ の B_k について条件 (S1)–(S4)。
4. $3 \le n \le 500$ と必要な色 c のすべての組 (n, c) が、小さい n の証拠か、$n_0 \le n$, $n_0 \equiv n \pmod{10}$ を満たす土台で扱われていること。

検算は数秒で終わる。

8　考察と未解決問題

■丸さ.　解 B_k は高さ 4 の帯で一方向にしか伸びないので、Fraser の 4-tiles' equation と同様に、公式記録に求められる丸さの条件 [4] を満たさない。すべてのチャレンジに**丸い**解はあるだろうか。2 方向に差し込める部品を用いた、差し込みの議論の 2 次元版は、この問いへの 1 つの取り組み方である。

■ほかの色.　公式の説明 [9] では、10 枚未満のパズルは 1 色でしか解けないとされている。しかし規則 (S1)–(S4) のもとでは $n = 7$ はそうではない。$n \equiv 7 \pmod{10}$ のすべてについて青のループが存在し (定理 8)、$n = 7$ 自身も含まれる。解けるすべての組 (n, c) を決定することは興味深い問題である。部品は 3 色すべてに存在するので、ある剰余類で土台が 1 つ見つかれば、その剰余類の十分大きなすべての n でその色は解ける。

■より小さい対象.　我々の部品は幅 3、高さ 4 であり、土台は $26 \le n_0 \le 37$ である。これらの大きさの最小化は試みていない。n_0 が小さくなれば、直接計算する証拠の数が減る。また、チャレンジの解の個数や、一般化した Discovery チャレンジ (タイルの多重集合が任意) が解をもつかを判定する問題の計算量も、自然な問いである。

付録 A　証拠データ

機械可読な証拠データは、検算プログラムとともに JSON ファイルとして配布する。

- `certificates/small/N`nn`c.json`: 42 個の小さい n の解
- `certificates/gadgets/gadget_`c`.json`: 3 個の部品
- `certificates/bases/base_`rc`.json`: 13 個の土台

図 4 以降に、$3 \le n \le 30$ のすべての小さい n の解を、必要な色ごとに 1 つずつ示す。ループは太線で描いた。続いて図 7 と図 8 に、13 個の土台を n_0 の小さい順に示す。各土台では、部品の 2 つのコピー G と $G + V$ を網掛けし、黒の太線で囲んだ。図 3 のように、新しい部品はその間に差し込む。

参考文献

[1] D. Baumeister and J. Rothe, Satisfiability parsimoniously reduces to the Tantrix™ rotation puzzle problem, *Fundamenta Informaticae* 91(1) (2009), 35–51. Preliminary version in MCU 2007, LNCS 4664, Springer.

[2] The ECLiPSe constraint programming system, `https://eclipseclp.org`.

[3] M. Holzer and W. Holzer, Tantrix™ rotation puzzles are intractable, *Discrete Applied Mathematics* 144(3) (2004), 345–358.

[4] F. Kino and Y. Uno, Solving Tantrix via integer programming, arXiv:1202.6438, 2012.

[5] F. Kino and Y. Uno, An integer programming approach to solving Tantrix on fixed boards, *Algorithms* 5(1) (2012), 158–175.

[6] N. Nethercote, P. J. Stuckey, R. Becket, S. Brand, G. J. Duck and G. Tack, MiniZinc: towards a standard CP modelling language, in *CP 2007*, LNCS 4741, Springer, 529–543.

[7] L. Perron and F. Didier, CP-SAT, Google OR-Tools, version 9.8, `https://developers.google.com/optimization`.

[8] J. Scherphuis, Tantrix, Jaap's Puzzle Page, `https://www.jaapsch.net/puzzles/tantrix.htm`.

[9] Tantrix puzzles, official Tantrix website, `https://www.tantrix.com/english/TantrixPuzzles.html`.

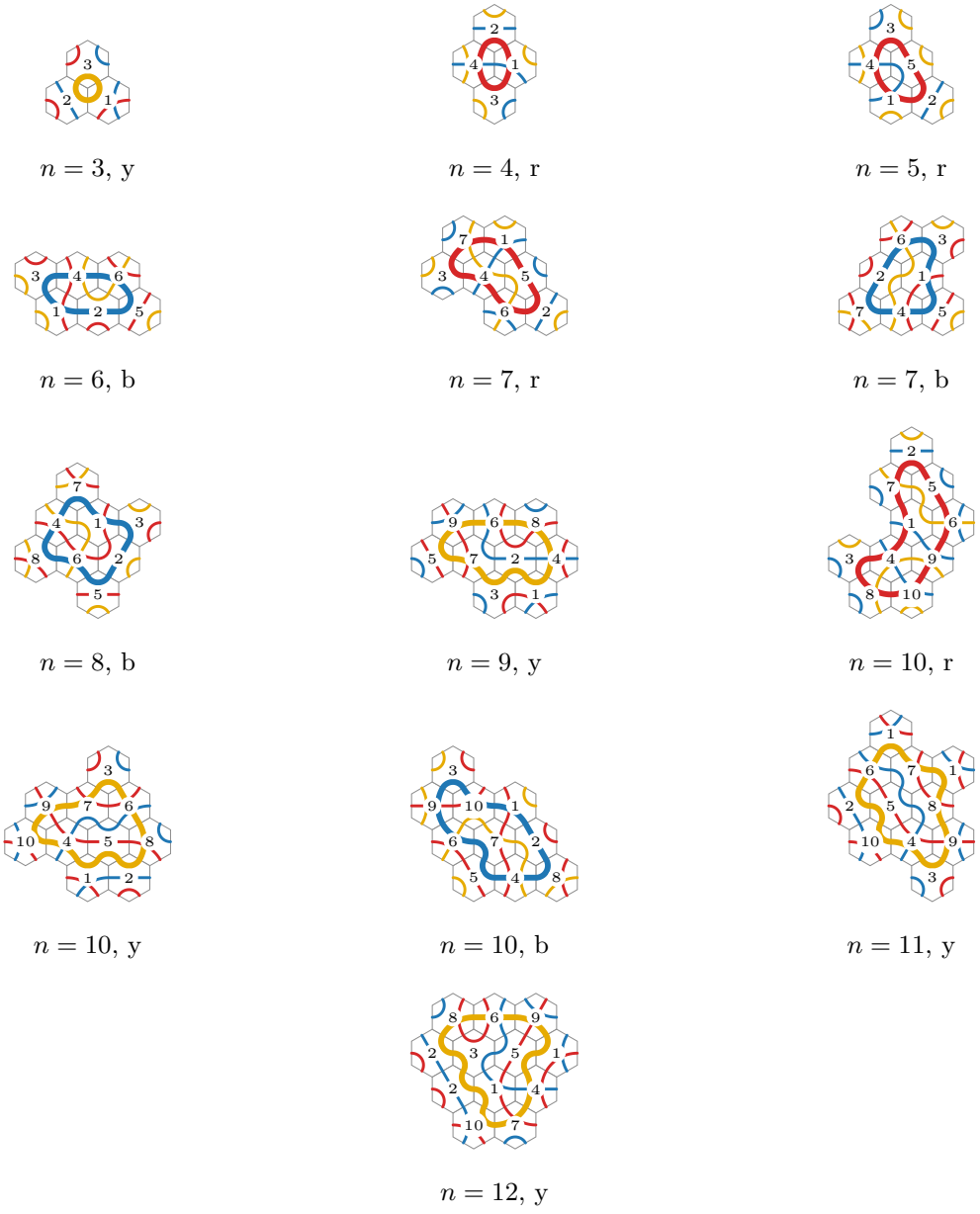
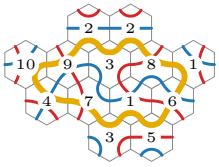
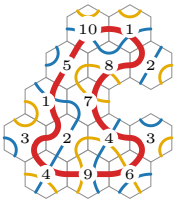


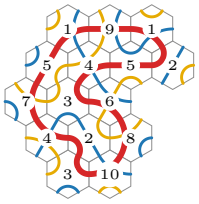
図 4　CP-SAT のモデルで直接求めた $3 \leq n \leq 12$ の解とループ色 (r: 赤, y: 黄, b: 青)。



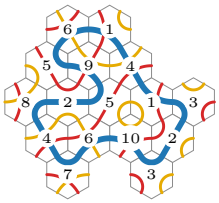
$n = 13$, y



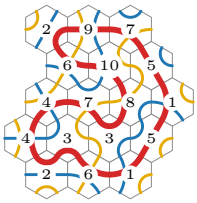
$n = 14$, r



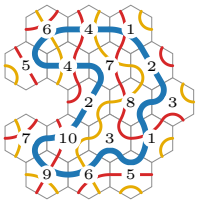
$n = 15$, r



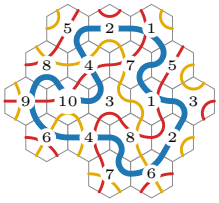
$n = 16$, b



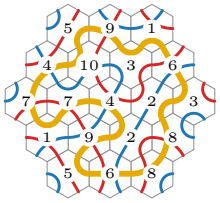
$n = 17$, r



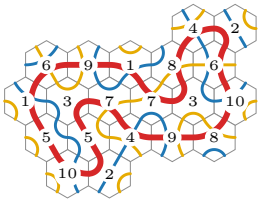
$n = 17$, b



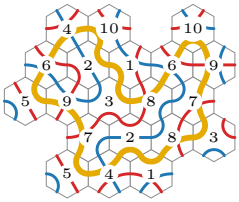
$n = 18$, b



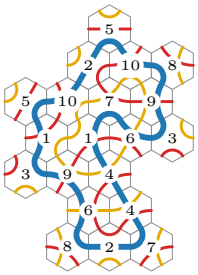
$n = 19$, y



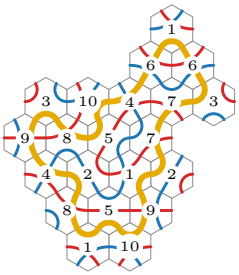
$n = 20$, r



$n = 20$, y

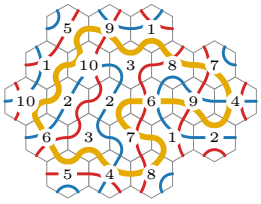


$n = 20$, b

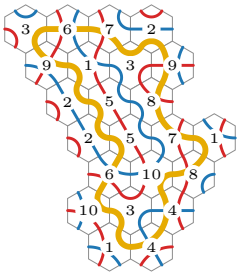


$n = 21$, y

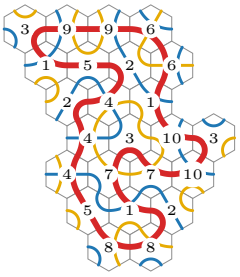
図 5　CP-SAT のモデルで直接求めた $13 \leq n \leq 21$ の解とループ色 (r: 赤, y: 黄, b: 青)。



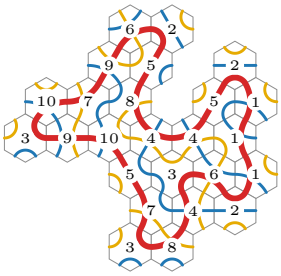
$n = 22$, y



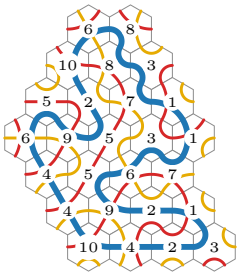
$n = 23$, y



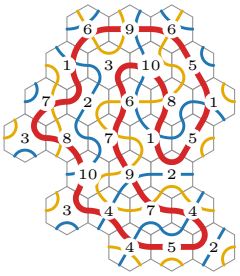
$n = 24$, r



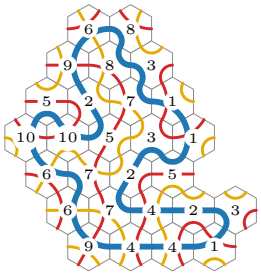
$n = 25$, r



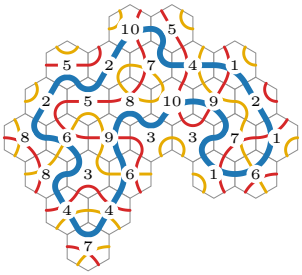
$n = 26$, b



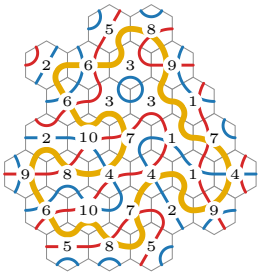
$n = 27$, r



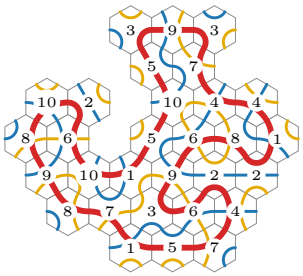
$n = 27$, b



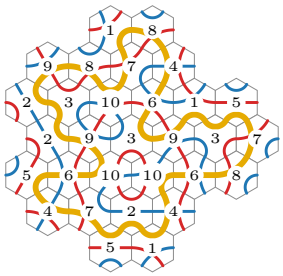
$n = 28$, b



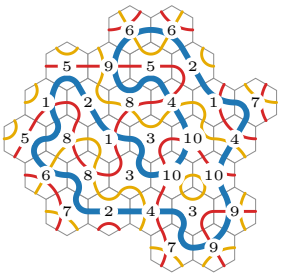
$n = 29$, y



$n = 30$, r



$n = 30$, y



$n = 30$, b

図 6　CP-SAT のモデルで直接求めた $22 \leq n \leq 30$ の解とループ色 (r: 赤, y: 黄, b: 青)。

$B_{6,\mathrm{b}},\ n_0 = 26$

$B_{7,\mathrm{r}},\ n_0 = 27$

$B_{8,\mathrm{b}},\ n_0 = 28$

$B_{9,\mathrm{y}},\ n_0 = 29$

$B_{0,\mathrm{r}},\ n_0 = 30$

$B_{0,\mathrm{y}},\ n_0 = 30$

$B_{0,\mathrm{b}},\ n_0 = 30$

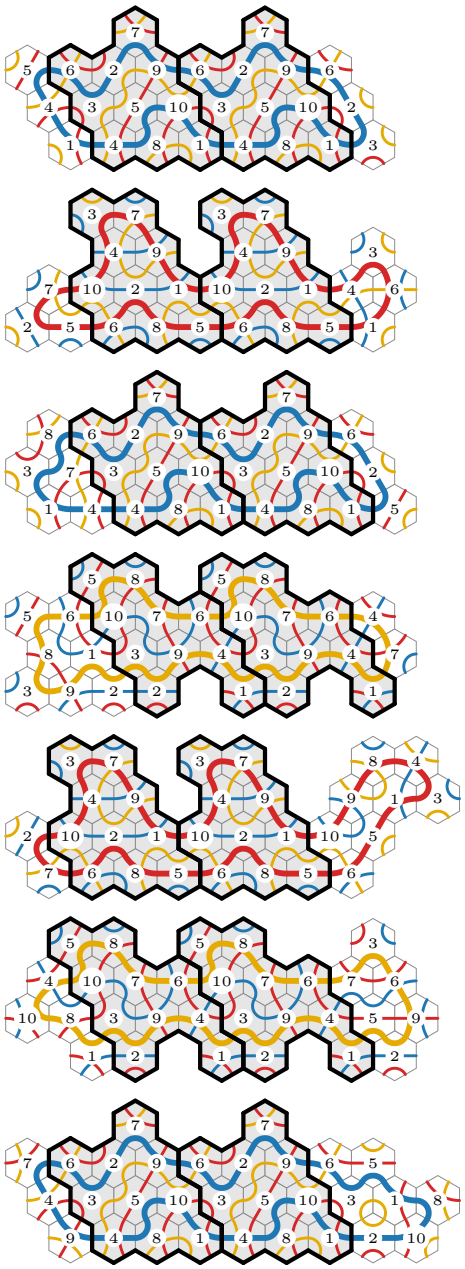


図 7　土台 (前半)。網掛けして黒の太線で囲んだ 10 枚ずつの塊が G と $G + V$ で、色の太線がループである。

$B_{1,\mathrm{y}},\ n_0 = 31$

$B_{2,\mathrm{y}},\ n_0 = 32$

$B_{3,\mathrm{y}},\ n_0 = 33$

$B_{4,\mathrm{r}},\ n_0 = 34$

$B_{5,\mathrm{r}},\ n_0 = 35$

$B_{7,\mathrm{b}},\ n_0 = 37$

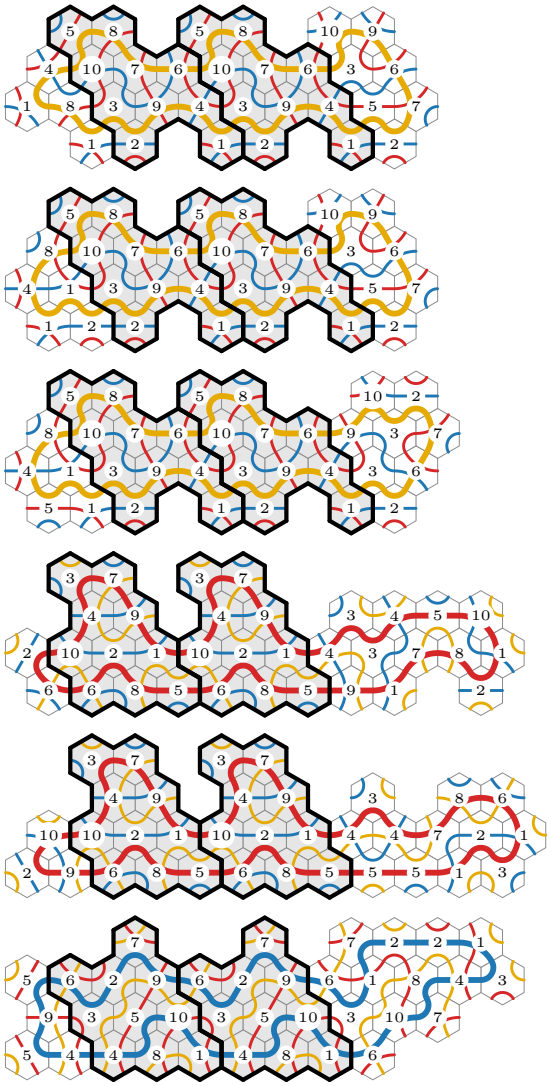


図 8　土台 (後半)。